BAC

2010-01-19

ثانوية حيرش محمد-وهران-　　　　تمارين في الهندسة الفضائية　　　　المستوى:نهائي تقني رياضي

التمرين الأول: في كل سؤال عين الإجابة الصحيحة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(3;1;3)$ و $B(-6;2;1)$

و المستوي (P) ذو المعادلة: $x+2y+2z=5$

1) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ هي:

أ)مستوي من الفضاء.　　ب)سطح كرة.　　ج)مجموعة خالية.

2) احداثيات النقطة H المسقط العمودي لـ A على (P) هي:

أ) $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$　　ب) $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$　　ج) $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

3) سطح الكرة ذو المركز B ونصف القطر 1 :

أ)يقطع المستوي (P) في دائرة.　　ب) مماس للمستوي (P).　　ج)لايقطع المستوي (P).

4)نعتبر (d) مستقيم من الفضاء يمر بـ A وشعاعه التوجيه $\vec{u}(1;2;-1)$ و (d') مستقيم معرف كمايلي:

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in R)$$

المستقيمان (d) و (d') هما :

أ) من نفس المستوي ومتوازيان.　　ب)من نفس المستوي ومتقاطعان.　　ج)ليس من نفس المستوي.

التمرين الثاني:باك أفريل2008

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(-1,2,3)$ و (D) مستقيم تمثيله الوسيطي

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$$\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \end{cases}$$

مع t عدد حقيقي

الهدف من هذا التمرين هو حساب المسافة d بين النقطة A و المستقيم (D) بطريقتين مختلفتين.

1. أ.عين معادلة ديكارتية (P) الذي يشمل A و عمودي على (D). المستوي

ب.تحقق أن النقطة $B(-3,3,-4)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

ج.أحسب المسافة d_B بين النقطة B و المستوي (P).

بدلالة كل d_B والطول AB. استنتج القيمة المضبوطة للمسافة d .

د. عبر عن المسافة d من

2.لتكن M نقطة من (D) .أكتب AM^2 بدلالة t أوجد إذن قيمة المسافة d

التمرين الثالث:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(3,-2,2)$ ، $B(6,1,5)$ ، $C(6,-2,-1)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم في A .
2. ليكن (P) مستوي في الفضاء معادلته $x+y+z-3=0$
   أثبت أن (P) عمودي على (AB) في A .
3. عين معادلة للمستوي (P') العمودي على (AC) ويشمل A .
4. أ)لتكن $D(0,4,-1)$ نقطة من الفضاء .
   أثبت أن (AD) عمودي المستوي (ABC) .
   ب)أحسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$.
   ج)أثبت أن $B\hat{D}C=\frac{\pi}{4}rad$.
   د)أحسب مساحة BDC
   - استنتج المسافة بين A و المستوي (BDC) .

ثانوية حرشي محمد | تصحيح الوثيقة حول الهندسة الفضائية | أقسام: 3 تقني رياضي.

التمرين الأول: $A(3,1,3)$ ، $B(-6,2,1)$.

$(P): x+2y+2z=5.$

1) مجموعة النقط M : $\|4\vec{MA}-\vec{MB}\|=2$

هي سطح كرة: لأن:

$\|4\vec{MA}-\vec{MB}\|=2$ تكافئ $\|3\vec{MG}\|=2$

ومنه: $MG=\frac{2}{3}$ مع G مرجح

الجملة: $\{(A,4);(B,-1)\}$.

سطح الكرة مركزه G ونصف قطره $\frac{2}{3}$.

2) إحداثيات H المسقط العمودي لـ A على (P) هي: $\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ لأن: $\vec{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا

$\vec{AH}=k\vec{n}$ مع $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (P)

$k\vec{n}\begin{pmatrix}k\\2k\\2k\end{pmatrix}$; $\vec{AH}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z-3\end{pmatrix}$

ومنه $\begin{cases}x-3=k\\y-1=2k\\z-3=2k\end{cases}$ $H(k+3,2k+1,2k+3)$

لكن: $H\in P$ إذن:

$k+3+2(2k+1)+2(2k+3)=5$

ومنه: $k=-\frac{2}{3}$

ومنه: $H\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$.

3) سطح الكرة ذو المركز B ونصف القطر 1: لا يقطع (P) لأن:

$$d(B,(P))=\frac{|-6+2(2)+2(1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{5}{3}$$

$d(B,(P))>R$ $(R=1)$ إذن (S) لا يقطع (P).

4) (d) و (d') ليسا من نفس المستوي:

$(d):\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=3-t\end{cases}$ $(d'):\begin{cases}x=3+2t'\\y=3+t'\\z=t'\end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطان خطيا إذن (d) و (d') ليسا متوازيان إذن إما من نفس المستوي ومتقاطعان أو ليس من نفس المستوي

نبحث عن t و t':

$\begin{cases}3+t=3+2t'\\3-t=t'\end{cases}$ بالجمع $3t'+3=6$

$t'=1$

نعوض في $3-t=t'$ نجد $t=2$

من أجل $t=2$: $\begin{cases}x=5\\y=5\\z=1\end{cases}$ $A'(5,5,1)$

من أجل $t'=1$: $\begin{cases}x=5\\y=4\\z=1\end{cases}$ $B'(5,4,1)$

إذن (d) و (d') لا يتقاطعان ومنه (d) و (d') ليس من نفس المستوي.

التمرين الثاني: (BAC AVRIL 2008):

$A(-1,2,3)$. $(D):\begin{cases}x=9+4t\\y=6+t\\z=2+2t.\end{cases}$

1. أ) معادلة (P) يشمل A وعمودي على (D):

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ هو ناظمي لـ (P) إذن:

$(P): 4x+y+2z+d=0$

لكن $A\in(P)$ إذن: $d=-4$

$(P): 4x+y+2z-4=0$

ب. تحقق أن $B(-3,3,-4)$ تنتمي إلى (D):

$\begin{cases}-3=9+4t\\3=6+t\\-4=2+2t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-3\\t=-3\\t=-3\end{cases}$

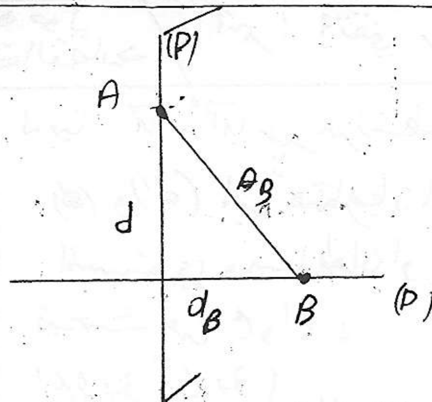
ومنه: $B\in(D)$

ج. حساب d_B حيث $d_B=d(B,(P))$.

$$d_B=\frac{|4(-3)+3+2(-4)-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\frac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$$

* المسافة AB بدلالة d و d_B:

بتطبيق نظرية فيثاغورث، أنظر الشكل.



لدينا :

لدينا : $AB^2 = d_B^2 + d^2$

$d^2 = AB^2 - d_B^2$; $AB^2 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}^2$

$AB^2 = 54$.

ومنه : $d^2 = 54 - \sqrt{21}^2 = 33$

ومنه : $d = \sqrt{33}$.

طريقة 2 : M نقطة من (D) :

كتابة AM^2 بدلالة t :

معناه $M \in (D)$: $M(9+4t ; 6+t ; 2+2t)$.

$A(-1, 2, 3)$.

اذن :

$AM^2 = \sqrt{(4t+10)^2 + (t+4)^2 + (2t-1)^2}^2$

$AM^2 = 21t^2 + 80t + 8t - 4t + 117$

$AM^2 = 21t^2 + 84t + 117$

نلاحظ أن : $AM = \sqrt{21t^2 + 84t + 117}$

استنتاج المسافة d :

المسافة d هي أصغر قيمة يأخذها الطول AM نضع f دالة :

$f(t) = AM = \sqrt{21t^2 + 84t + 117}$.

ندرس اتجاه تغير f :

$$f'(t) = \frac{42t + 84}{2\sqrt{21t^2 + 84t + 117}}$$

يكافئ $f'(t) = 0$ و $42t + 84 = 0$

$t = -2$

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$f(-2)$	↗	

ومنه أصغر قيمة تأخذها AM هي

$d = f(-2)$

$d = \sqrt{33}$.

التمرين 3 : $A(3, -2, 2)$ ، $B(6, 1, 5)$.
$C(6, -2, -1)$

1) اثبات أن ABC قائم : $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

اذن : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ ABC قائم في A.

2) اثبات أن (P) عمودي على (AB) ويشمل A :

يكفي اثبات أن $\vec{n}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطيا فرضا أن

مع $\vec{AB} = 3\vec{n}$ ، $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (P) .

ونلاحظ أن (P) يشمل $A(3,-2,2)$.

3) تعيين معادلة المستوي (P') العمودي على (AC) في A :

لدينا $\vec{AC}$ هو شعاع ناظمي لـ (P') اذن :

$(P') : 3x - 3z + d = 0$.

لكن $A \in (P')$ اذن $d = -3$: $(P') : 3x - 3z - 3 = 0$

4) أ) اثبات أن (AB) عمودي على المستوي (ABC) :

يكفي اثبات أن $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ و $\vec{AD} \perp \vec{AC}$

فعلا : $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$ و $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0$ وهو المطلوب .

ب) حجم رباعي الوجوه ABDC :

$V = \frac{1}{3} S(ABC) \times h$ ، h : ارتفاع رباعي الوجوه

$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ $V = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 27$.

ج) اثبات أن : $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$ rad

نعلم أن $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = DB \cdot DC \cdot \cos\widehat{BDC}$ اذن $\cos\widehat{BDC} = \frac{\vec{DB} \cdot \vec{DC}}{DB \cdot DC}$

ومنه $\cos\widehat{BDC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

د) مساحة BDC : $S(BDC) = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

$S(BDC) = 27$.

* استنتاج المسافة بين A و BDC :

h : البعد العمودي بين A و BDC $V(ABDC) = \frac{1}{3} S(BDC) \cdot h$

ومنه $h = \frac{3 V(ABDC)}{S(BDC)} = 3$.

$h = \frac{3 \cdot 27}{27} = 3$

بالتوفيق : السيد مغني .